

## FUNCIONES DE AUTOCORRELACIÓN HÍBRIDAS

Charles Rogério Pavaglio Szinvelski, Gervásio Annes Degrazia y Lidiane Buligon <sup>1</sup>

<sup>1</sup> UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA – UFSM, RS, BRAZIL

charless@ufsm.br, gervasiodegrazia@gmail.com y prof.buligon@gmail.com

### 1. CARACTERIZACIÓN Y OBJETIVOS

La función de autocorrelación turbulento es un cuantificador estadística pertinente tanto para los estudios de dispersión escalares y para la obtención de relaciones fundamentales asociados con el estudio de los fenómenos de turbulencia. En este sentido, el uso de estas funciones de autocorrelación en la Teoría Estadística de Taylor [1921] permite el cálculo de parámetros de dispersión y las relaciones funcionales para la tasa de disipación de modelos de dispersión turbulentos Eulerianos y Lagrangianos.

Normalmente, la mayoría de los estudios teóricos y prácticos en la turbulencia describe las relaciones fundamentales y las funciones de autocorrelación lagrangianas de un campo turbulento bien desarrollado ([1975]; [1972], [1983] y [1995]). En su texto clásico sobre la teoría de la difusión estadística de la turbulencia, Taylor [1921] considerada una función exponencial para la forma de autocorrelación lagrangiana (mirar Figura 1, línea continua),

$$R_L(\tau) = \exp(-\tau/T_L), \quad (1)$$

con  $T_L$  el tiempo de autocorrelación lagrangiana.

Alternativamente, una segunda formulación se da en Philips y Panofsky [1982] (mirar Figura 2, línea continua), sob a forma

$$R_L(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{T_L}\right)^{-2}. \quad (2)$$

Las funciones de autocorrelación clásicos, como la función exponencial [1921] y la función propuesta Philips y Panofsky [1982] describen adecuadamente el comportamiento de régimen turbulento bien desarrollado. Sin embargo, fallan completamente en la descripción de la función de autocorrelación observada en presencia del fenómeno de *meandering*, que ocurre en condiciones de viento fraco por debajo de un cierto valor crítico (menos de 1,5 m/s [2005]) donde no es posible determinar una dirección preferida para el viento medio. En esta configuración, la dirección del viento horizontal varía y los contaminantes se dispersan acerca de muchos sectores angulares. En consecuencia, el comportamiento oscilatorio del viento es el mecanismo diseminador de los contaminantes en diferentes direcciones y causa una reducción en la concentración máxima (Degrazia *et al* [2008]). Esta descripción es una caracterización del fenómeno de *meandering*, que consta de oscilaciones de baja frecuencia del viento horizontal.

Frenkiel [1953] propuso una función de autocorrelación para describir lo fenomeno de *meandering* y que contempla el comportamiento oscilatorio del viento horizontal (y por lo tanto describe la presencia de lóbulos negativos en la función de la autocorelação horizontal del viento, un hecho que caracteriza el fenómeno de *meandering*), en la forma

$$R_L(\tau) = e^{-p\tau} \cos(q\tau) \quad (3)$$

con  $q = mp$  y  $p = \frac{1}{(1 + m^2)T_L}$  y  $m \geq 0$  es una cantidad adimensional que controla la frecuencia

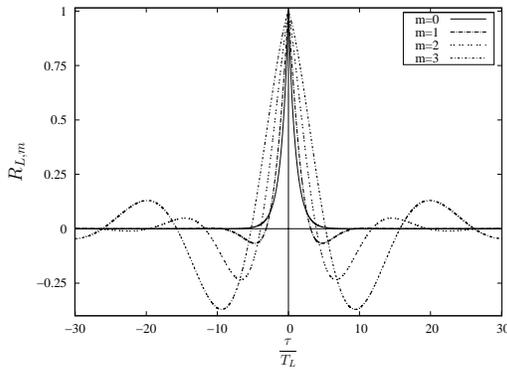


Figura 1: Funciones de Autocorrelación de Frenkiel para  $m = 0, 1, 2, 3$  (FAF). Cuando  $m = 0$  en la Ecuación (3) se recupera la Ecuación (1).

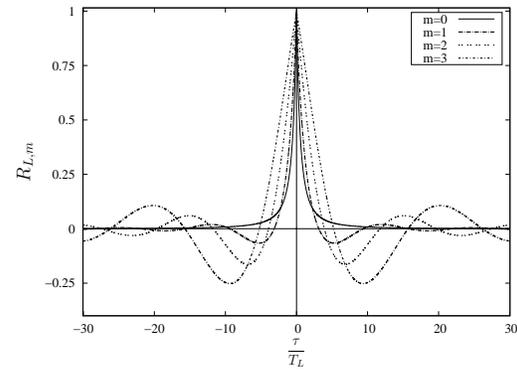


Figura 2: Nueva Formulación de Funciones de Autocorrelación (NAF) para  $m = 0, 1, 2, 3$ . Para  $m = 0$  la Ecuación 4 es la Ecuación 2.

de oscilación del viento horizontal.

Del mismo modo, si adpata a la Ecuación (2) para describir el fenómeno de *meandering*, y llega formulación (ver Figura 2)

$$R_L(\tau) = \frac{\cos(q\tau)}{(1 + p\tau)^2}, \quad (4)$$

for  $p = \frac{1}{(1 + m^2)T_L}$  and  $q = mp$ .<sup>1</sup>

En este trabajo se discute la validación de expresiones funcionales de la autocorrelación lagrangiana aplicadas a situaciones de baja velocidad del viento (fenómeno de meandro) y de turbulencia bien desarrollado en la Capa Límite Planetaria (CLP), así como la derivación de algunos parametros turbulentos. Las funciones analizadas son la Función de Autocorrelación de Frenkiel – FAF (Frenkiel [1953]) e una nueva formulación de la función de autocorrelación – NAF (Szinvelski [2012]), respectivamente.

## 2. METODOLOGÍAS

La verificación de los requisitos matemáticos y físicos de FAF y NAF siguen los criterios presentados por Manomaiphiboon y Russel [2003] y que permite la deducción de parámetros turbulentos y relaciones fundamentales empleados en modelos de dispersión lagrangianos a través de la Teoría Estadística de Taylor (Taylor [1921]).

### 2.1 Criterios de validación de una función de autocorrelación

En [2003], se establecieron cuatro criterios para la validación de una función de autocorrelación lagrangiana lateral bajo turbulencia estacionaria y homogénea. Tales criterios, en condiciones especificadas, expresan las propiedades matemáticas que surgen de sus requerimientos físicos necesarios para la validación de una función de autocorrelación aplicada al estudio de la turbulencia.

En continuación, se presentan los criterios de acuerdo con [2003].

<sup>1</sup>Una propiedad fundamental de las funciones de autocorrelación deben presentar es la paridad par (turbulencia homogénea y estacionaria), y así  $R_L(|\tau|) = \frac{\cos(q|\tau|)}{(1 + p|\tau|)^2}$ .

I:  $R_L(\tau)$  es limitada en la origen con  $|R_L(\tau)| \leq 1 = R_L(0)$ . Adicionalmente,  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_L(\tau) = 0$  y  $\int_0^{+\infty} |R_L(\tau)| d\tau < \infty$ .

Sea una función de autocorrelación general,

$$R_L(\tau) = \frac{\langle u(t)u(t + \tau) \rangle}{\langle u^2 \rangle}, \quad (5)$$

es inmediata que  $R_L(0) = 1$ , la máxima correlación de medición de la velocidad del viento se da en  $\tau = 0$  y por lo tanto para cualquier otro tiempo de correlación vale  $|R_L(\tau)| \leq 1^2$ .

La imposición de que  $\int_0^{+\infty} |R_L(\tau)| d\tau$  sea finita, permite obtener la escala de tiempo integral lagrangiana (Criterio III) que, en media, es la medida temporal en que un elemento de fluido se mueve en una dirección determinada (Hinze [1975]), y es razonable esperar una reducción de esta correlación en el tiempo y que esto vaya a cero para tiempos de observación largos.

II:  $R_L(\tau)$  es suave  $\tau$ . En la origen  $\left. \frac{dR_L(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$  y  $\left. \frac{d^2 R_L(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} < 0$ .

Las propiedades matemáticas descritas en el Criterio II se deben a la expansión en serie de  $R_L(\tau)$  alrededor del origen ( $\tau \approx 0$ ),

$$R_L(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left. \frac{d^{(n)} R_L(\tau)}{d\tau^n} \right|_{\tau=0} \frac{\tau^n}{n!}. \quad (6)$$

Debida la paridad de  $R_L$ , las derivadas de orden impar son nulas, en particular,  $\left. \frac{dR_L(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$ .

Logo, de la Ecuación (6),

$$R_L(\tau) = 1 + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 R_L(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^4), \quad (7)$$

e, consecuentemente,  $\left. \frac{1}{2} \frac{d^2 R_L(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} < 0$ , y el teste de la segunda derivada en un rango centrado en el origen ( $\tau \approx 0$ ), asegurando una representación de  $R_L(\tau)$  por polinomio de segundo grado y que, en  $\tau = 0$ , cumple con los requisitos del Criterio I.

De acuerdo a Hinze [1975], mediante la introducción de la escala de tiempo  $\tau_L$ , que contiene valores temporales muy cerca del origen, la Ecuación (7) se reescribe a través de esta nueva escala de tiempo como

$$R_L(\tau) \approx 1 - \frac{\tau^2}{\tau_L^2}, \quad (8)$$

parábola osculadora  $R_L$  en la origen. Tal expresión, permite la definición de la escala de tiempo de disipación lagrangiana  $\tau_L$  por la relación

$$\frac{1}{\tau_L^2} = - \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 R_L(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (9)$$

<sup>2</sup> Tenga en cuenta la diferencia de velocidad cuadrática  $\langle u(t + \tau) - u(t) \rangle^2 \geq 0$

III: La escala de tiempo integral lagrangiana definida por  $T_L = \int_0^{+\infty} R_L(\tau) d\tau$  es limitada e bien definida.

Este criterio es una consecuencia directa del Criterio I, y establecida la convergencia de la integral impropia puede definir una escala de tiempo lagrangiana  $T_L$ .

IV: Desde el teorema de Wiener-Khintchin ([1985]) la  $R_L(\tau)$  y  $E_L(\omega)$  són expresas por lo par de transformada de Cosseno de Fourier:

$$R_L(\tau) = \frac{1}{\langle u^2 \rangle} \int_0^{+\infty} E_L(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \text{ y } E_L(\omega) = \frac{2\langle u^2 \rangle}{\pi} \int_0^{+\infty} R_L(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \text{ con } \omega \text{ la frecuencia turbulenta.}$$

De acuerdo con la teoría de lo subrango inercial (K41) [1941],  $E_L$  puede ser expresa por:

$$E_L(\omega) = \kappa \bar{\epsilon} \omega^{-2} \propto \omega^{-2}, \text{ para } 1 \ll \omega T_L \ll \frac{T_L}{\tau_\eta}, \text{ siendo } \kappa \text{ una constante universal adimensional, } \bar{\epsilon} \text{ es la tasa media de dissipación de energía turbulenta y } \tau_\eta \text{ es la escala de tiempo de Kolmogorov.}$$

La expresión para  $E_L(\omega)$  resultante debe estar de acuerdo con la teoría K41 ([1941] –  $E_L(\omega) \propto \omega^{-2}$  para  $\omega T_L \gg 1$ ).

## 2.2 Parametros turbulentos obtenidos de la Teoria Estadística de Taylor

Como exemplificación, sigue la obtención del parametro de dispersión lateral  $\sigma_y$ , que es una cantidad estadística fundamental en la derivación de la expresión para la tasa de dissipación turbulenta empleada en modelos de dispersión ([1979], [2005b] y [2008]), para las funciones de autocorrelación clasicas previamente definidas.

Desde la Ecuación de Taylor para la varianza espacial lateral

$$\sigma_y^2(t) = 2\sigma_v^2 \int_0^t (t - \tau) R_{L_v}(\tau) d\tau, \tag{10}$$

Tennekes [1979] parte de la Ecuación (1)<sup>3</sup> en lo modelo de difusión estadístico de Taylor (Ecuación (10)) y obtuve la siguiente expresión para el parametro de dispersión lateral

$$\sigma_y^2(t) = 2\sigma_v^2 T_{L_v} \left[ \frac{1}{T_{L_v}} - 1 + e^{-\frac{t}{T_{L_v}}} \right] \tag{11}$$

donde  $\sigma_v$  es la desviación estándar de la velocidad lateral turbulenta. Substituyendo la Ecuación (11) e empleando argumentos de similaridad del subrango inercial ([1941]; [1975]) obtiene-se la siguiente relación fundamental para la tasa de dissipación turbulenta  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = \frac{2\sigma_v^2}{C_0 T_{L_v}}. \tag{12}$$

Y para la Ecuación 2, la tasa obtenida es ([2010]) :

$$\epsilon = \frac{4\sigma_v^2}{C_0 T_{L_v}}. \tag{13}$$

<sup>3</sup>El subíndice  $v$  indica el componente de velocidad lateral del elemento de fluido.

### 3. RESULTADOS

Las funciones de autocorrelación demostradas cumplen los criterios principales de validación de funciones de autocorrelación lagrangiana y con estos criterios se pueden definir los respectivos parámetros de varianza espacial lateral y de estas relaciones se obtienen las escalas características de turbulencia como la escala de tiempo integral lagrangiana y se recupera la relación esperada entre la energía cinética turbulenta y la función de autocorrelación a través de la transformada de Fourier, en el subrango inercial. Se derivan, también, las respectivas expresiones para la tasa de disipación turbulenta.

#### 3.1 Análisis de los criterios de validación para FAF

En esta sección se analiza la FAF propuesto por [1953] (Equação (3)) desde la perspectiva de los criterios de validación presentado en la Sección 2.1.

I:  $R_L(\tau)$  es una función par por definición, e tiene las siguientes propiedades:

(i)  $|R_L(\tau)| \leq 1 = R_L(0)$ , logo limitada acerca de la origen y asume el máximo 1 en  $\tau = 0$ . De acuerdo con resultados presentados en [1975] y [1972], y, consecuentemente, revela que la forma parabólica resultante de la expansión de una función de autocorrelación lagrangiana teórica<sup>4</sup> en  $\tau \approx 0$  oscula  $R_L(\tau)$  en la origen.

(ii) Esta propiedad se refiere al comportamiento cualitativo esperado de  $R_L(\tau)$  cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$ , que converge gradualmente a cero. Esto se obtiene a partir de la constatación de que  $|R_L(|\tau|)| \leq \exp(-p\tau)$  y la aplicación del teorema de confrontación;

(iii) Esta propiedad permite una definición de la escala integral Lagrangiana, que resultan del hecho de  $\int_0^{+\infty} |R_L(\tau)| d\tau$  ser convergente. Como sigue,  $\int_0^{+\infty} \exp(-p|\tau|) d\tau = \frac{1}{p}$ , un valor finito.

II: Aunque que  $R_L(\tau)$  sea continua en  $\tau$ , ella no es suave, una vez que sus derivadas laterales en  $\tau = 0$  difieren ( $R_{L+}'(0) = -p \neq p = R_{L-}'(0)$ ), e consecuentemente la derivada en  $\tau = 0$  no es definida.

El incumplimiento de este criterio, en su totalidad, se debe a la forma funcional de la ley de la FAF, que no tiene derivadas definidas en la origen (Figura ??). ALa implicación física de este hecho indica que la FAF nno se recomienda para la investigación de micro estructuras de turbulencia viscosa( [1979]). Sin embargo, para aplicaciones prácticas, bajo el supuesto de la turbulencia bien desarrollado (número de Reynolds tiende a infinito), el incumplimiento de este criterio en las regiones de alta frecuencia indica que las escalas de energía y las características asociadas a estos turbillones no son relevantes en el proceso de dispersión de escalares pasivos.

III: La escala de tiempo integral lagrangiana  $T_L$  definida por  $\int_0^{+\infty} R_L(\tau) d\tau$  es limitada e bien definida. Como sigue,  $T_L = \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) \cos(q\tau) d\tau = \frac{1}{p(m^2 + 1)} = T_L$ , con  $p = \frac{1}{T_L(m^2 + 1)}$ . En consecuencia, esta escala de tiempo característica de la estructura del flujo de fluido puede ser definido.

IV: Para validar este criterio, básicamente, si utiliza el cheque por la siguiente relación

<sup>4</sup>  $R_L(\tau) \approx 1 - \tau^2/\tau_L^2$ , parábola osculador que define la escala de tiempo de disipación lagrangiana  $\tau_L^2$  ([1975]).

$$E_L(\omega) = \frac{2\langle u^2 \rangle}{\pi} \int_0^{+\infty} R_L(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \propto \omega^{-2}. \text{ Como sigue (ver también la Figura 3),}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_L(\omega)}{\langle u^2 \rangle T_L} &= \frac{2}{\pi T_L} \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) \cos(q\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{2p}{\pi T_L} \left[ \frac{\omega^2 + q^2 + p^2}{[(\omega + q)^2 + p^2][(\omega - q)^2 + p^2]} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{A(\omega T_L)^2 + 1}{A^2(\omega T_L)^4 + 2B(\omega T_L)^2 + 1} \right] \propto \frac{\omega^2}{\omega^4} \propto \omega^{-2}, \quad (A = 1 + m^2, B = 1 - m^2). \end{aligned}$$

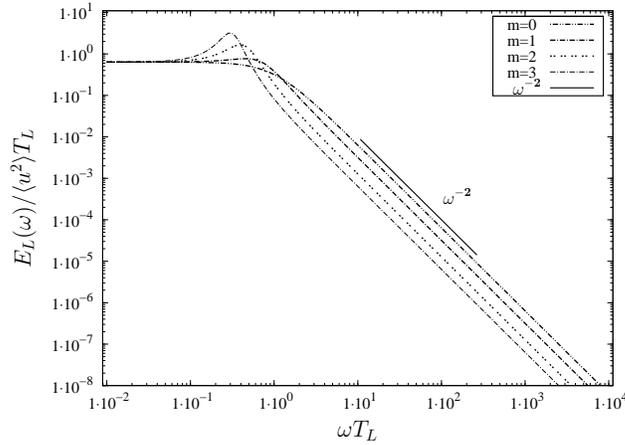


Figura 3: Espectro de energía turbulenta obtenido a partir de la Ecuación (3), para valores de  $m = 0, 1, 2$  e  $3$ .

### 3.2 Derivación de parámetros turbulentos asociados con FAF

De manera análoga a lo que se hizo para la Ecuación 1 (Sección 2.2), considere la AFA, (3), y

$$\sigma_y^2(t) = 2\sigma_v^2 \int_0^t (t - \tau) e^{-p\tau} \cos(q\tau) d\tau = (1 - 2m - m^2) T_{L_v}^2 e^{-pt} \text{sen}(qt) + t T_{L_v} + (m^2 - 1) T_{L_v}^2 \quad (14)$$

Haciendo una expansión en series de Maclaurin para  $t \ll T_{L_v}$  y truncando en tercer orden, resulta la siguiente aproximación para (14),

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_v^2 t^2 - \frac{p \sigma_v^2}{3} t^3. \quad (15)$$

En la Ecuación (15), el primr término de corrección es negativo y asi, reduce la dispersión lateral de partículas de fluido.

De la derivación propuesto por [1979], si obtiene

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_v^2 t^2 - \frac{C_0 \epsilon}{6} t^3. \quad (16)$$

Y en comparación directa de la Ecuación (16) con la Ecuación (15), resulta la forma funcional general para la tasa de disipación turbulenta<sup>5</sup>,

$$\epsilon = \frac{2p\sigma_v^2}{C_0} = \frac{2}{1 + m^2} \frac{\sigma_v^2}{C_0 T_{L_v}}. \quad (17)$$

<sup>5</sup>Para  $m = 0$  la Ecuación (17) se recupera el resultado clásico.

Desde un punto de vista físico, la nueva relación fundamental dada por la Ecuación (17) emantene la premisa básica contenida en la Ecuación (12), es decir que la tasa de disipación de la turbulencia es proporcional a la energía disponible e inversamente proporcional a la escala de tiempo asociado con los turbillones que contiene la energía principal del campo turbulento. Aunque la Ecuación (17) mantener la premisa fundamental, viene este nuevo parámetro de relación  $p$  que relaciona  $\epsilon$  al fenómeno de *meandering*. De la relación entre  $p$  y  $m$  se puede observar que a medida que  $m$  aumenta y el fenómeno de *meandering* comienza a manifestarse (movimientos oscilatorios de baja frecuencia están presentes), la tasa de disipación turbulenta disminui. Este comportamiento es físicamente razonable, ya que las oscilaciones de baja frecuencia están relacionados con el número de onda mucho menor que los asociados disipación molecular.

### 3.3 Análisis de los criterios de validación para NAF

Análogo a Sección 3.1, y se presentará solamente los cambios e conclusiones distintas

I: Sigue las alteraciones

(ii) Para la Ecuación 4, sigue del teorema del confronto empleado en la expresión  $|R_L(|\tau|)| \leq (1 + p|\tau|)^{-2}$ ;

(iii)

$$\int_0^{+\infty} R_L(\tau) d\tau \leq \left| \int_0^{+\infty} R_L(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^{+\infty} |R_L(\tau)| d\tau = \frac{1}{p} = (1 + m^2) T_L,$$

un valor finito.

II: La misma conclusión;

III: Algunas consideraciones:

- La resolución de la integral es<sup>6</sup>

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(q\tau)}{(1 + p\tau)^2} d\tau = (1 + m^2) T_L \left[ 1 - m \left( \sin(m) \text{Ci}(m) + \cos(m) \left( \text{Si}(m) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right];$$

- para  $m = 0$ , el resultado obtenido es  $T_L$ , de acuerdo com [1982] e atiende [2003] para este criterio; y, conforme [1992], este resultado es esparado una vez que el argumento de la NAF tiene dimensiones de lo inverso de la escala integral  $T_L$  y, con la integración, si recupera la dimención de la escala integral;

- todavia, para  $m \neq 0$  hay un factor de amplificador  $m^2 + 1$ , en la escala integral (consecuencia de la forma del argument de la NAF); y la expresión restante tiene un valor medio uno (ver Figure 4);

- de las consideraciones obtenidas, el resultado sugiere la siguiente interpretación: la situación  $m = 0$  establece el tiempo de autocorrelación para una turbulencia bién desarollada,  $T_{L,0}$ , y para los demás valores de  $m$ , la escala de tiempo integral será proporcional al factor amplificador  $m^2 + 1$ , precisamente

$$T_{L,m} = (1 + m^2) T_{L,0}. \tag{18}$$

IV: Si obtiene

<sup>6</sup>Donde,  $\text{Si}(m)$  y  $\text{Ci}(m)$  són, respectivamente, la Función Seno Integral y la Función Coseno Integral.

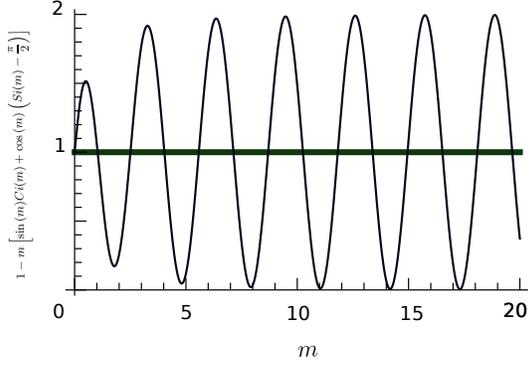


Figura 4: *Plot* de la expresión:  
 $1 - m \left[ \sin(m) \text{Ci}(m) + \cos(m) \left( \text{Si}(m) - \frac{\pi}{2} \right) \right]$ .

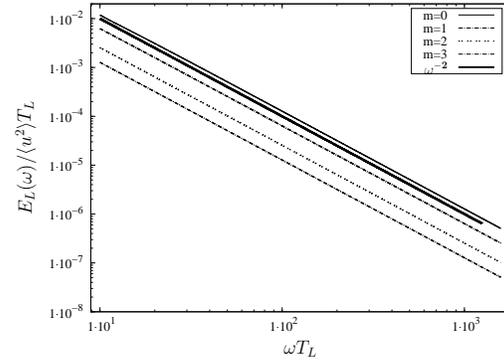


Figura 5: Espectro de energía turbulenta obtenido de la Ecuación 4, para  $m = 0, 1, 2, 3$  en lo Subrango inercial

$$\frac{E_L(\omega)}{\langle u^2 \rangle T_L} = \frac{(m^2 + 1)}{\pi} \left\{ 2 - A \left[ \cos(A) \left( \frac{\pi}{2} - \text{Si}(A) \right) + \sin(A) \text{Ci}(A) \right] - B \left[ \cos(B) \left( \frac{\pi}{2} - \text{Si}(B) \right) + \sin(B) \text{Ci}(B) \right] \right\} \quad (19)$$

with  $A = (m^2 + 1)(\omega T_L) + m$  and  $B = (m^2 + 1)(\omega T_L) - m$ .

La Ecuación 19 no presenta la forma  $\omega^{-2}$ , en su respuesta, todavía lo comportamiento deseado es obtenido en la representación grafica (ver Figura 5).

### 3.4 Derivación de parámetros turbulentos asociados con NAF

Seguendo el procedimiento de la Sección 3.2 para NAF (Ecuación 4), es obtenido:

$$\frac{\sigma_y^2(t)}{2\sigma_v^2} = -\frac{\cos(qt)}{p^2} + \frac{1+pt}{p^2} - \frac{q(1+pt)}{p^3} \sum_{m=0,1} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(pt)^{2n+1+m}}{2n+1+m} - \frac{(pt)^{2n+2+m}}{2n+2+m} \right) \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n m^{2k+m}}{(2k+m)!} \right) \right],$$

y así

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_v^2 t^2 - \frac{2p\sigma_v^2}{3} t^3, \quad (20)$$

sigue que<sup>7</sup>,

$$\epsilon = \frac{4p\sigma_v^2}{C_0} = \frac{4}{1+m^2} \frac{\sigma_v^2}{C_0 T_L}. \quad (21)$$

## 4. CONCLUSIONES.

De las análisis de las expresiones de funciones de autocorrelación lagrangiana bajo acción de parámetros que pueden describir tanto los efectos de turbulencia bien desarrollada como los efectos del fenómeno de meandro son validadas y, además, recuperan resultados clásicos (turbulencia bien desarrollada) sobre los parámetros turbulentos utilizados en los modelos de dispersión y las extiende a las situaciones de ocurrencia del fenómeno del *meandering*.

<sup>7</sup>Para  $m = 0$  la Ecuación (21) se recupera el resultado clásico.

**BIBLIOGRAFÍA**

- [1921] TAYLOR, G. I., *Diffusion by continuous movements*. Proc. London Math. Soc. 20:—, 1921.
- [1975] Hinze, J. O. *Turbulence* MC Graw Hill 790, 1975.
- [1972] Tennekes, H. and Lumley, J. K. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Massachusetts 298, 1972.
- [1983] Pasquill, F. Smith, F. B. *Atmospheric Diffusion*. Ellis Horwood, 1983.
- [1995] Frisch, U. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.
- [1982] Phillips, P. and Panofsky, H. A. *A re-examination of lateral dispersion from continuous sources*.
- [2005] Anfossi, D., Oetl, D., Degrazia, G. and Goulart, A. *An analysis of sonic Anemometer observations in low wind speed conditions*. *Boundary-Layer Meteorology*. 114: 179–203, 2005.
- [2008] Degrazia, G. A. *et al*: *Turbulence dissipation rate derivation for meandering occurrences in a stable planetary boundary layer*. *Atmospheric Chemistry and Physics* 8 (6), 1713-1721, 2008.
- [1953] FRENKIEL, F.N., *Turbulent diffusion: mean concentration distribution in a flor field of homogeneous turbulence*. *Adv. Appl. Mech.*, 3, 1953, 61-107.
- [2012] SZINVELSKI, C. R. P. ET AL, *Dedução da Equação de Variância Espacial Lateral para uma nova formlação da função de autocorrelação lagrangiana*. ISSN: 2179-460X Edição Esp. Dez. 2013. p. 187 - 189. <<http://dx.doi.org/10.5902/2179-460X11597>>
- [2003] MANOMAIPHIBOON, K. AND RUSSEL, A. G., *Evaluation os some proposed formsa of lagragian velocity correlation coeficient*. *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, 24:709–712, 2003.
- [1941] Kolmogorov, A. N. *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers*. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30():301–305, 1941.
- [1985] Gardiner, C. W. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and NATural Sciences*. Springerr-Verlag, Berlin, 1985.
- [1979] Tennekes, H. *The exponential lagrangian correlation function and turbulent diffusion in the inertial subrange*. *Atmospheric Environment*, 13(11):1565–1568, 1979.
- [2005b] Degrazia, G. A. *et al*: *On the universality of the dissipation rate functional form and of the autocorrelation function exponential form*. *Atmospheric Environment*, 39 (10), 1917–1924, 2005.
- [2010] Degrazia, G. A. *et al*: *Autocorrelation function formulations and the turbulence dissipation rate: Application to dispersion models*. *PHYSICA A*, 389, 5808–5813, 2010.
- [1992] McComb, W. *The physics of fluid turbulence*. Clarendon Press, Oxford 572, 1992.