

Filtro de Kalman Discreto para determinar una alerta contra fenómenos hidrometeorológicos extremos ante la variabilidad climática

Ricardo Pérez Indoval¹, Rabindranath Romero López¹, Marisol Cruz Esteva¹, Robert Hausler³, Mathias Glaus³, Eduardo Castillo González², Francisco Javier Aparicio Mijares⁴, Mirce Ivón Morales Velázquez⁴, José Avidán Bravo Jácome⁴.

⁽¹⁾Universidad Veracruzana, Facultad de Ingeniería, Xalapa, Ver., México.

⁽²⁾Universidad Veracruzana, Facultad de Ingeniería Civil, Xalapa, Ver. México

⁽³⁾École de technologie supérieure, Département de génie de la construction, Québec, Canadá.

⁽⁴⁾Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México.
Indoval_05@hotmail.com

Introducción

Dicen que el agua tiene memoria, que por eso inunda zonas habitadas por los hombres en lo que antes eran lechos de ríos o lagunas. También las aguas generan memorias en la gente, a veces recuerdos dolorosos que el tiempo no alcanza a menguar.

El estado de Veracruz, cuenta con un complejo sistema hidrológico, del cual escurre casi la tercera parte de todo el agua del país, esto hace que la presencia de los fenómenos hidrometeorológicos represente una situación de vulnerabilidad para la población veracruzana poniendo en riesgo su integridad, sus bienes patrimoniales y productivos, así como su entorno físico (Sinapro, 2010). Los desastres de mayor incidencia en el estado de Veracruz, tienen su origen en lluvias intensas asociadas a ciclones tropicales, ondas del este y frentes fríos, que provocan depresiones y tormentas tropicales, huracanes, inundaciones, heladas, sequías y deslizamientos de tierras, entre otros (Jáuregui *et al*, 1990). Si se tiene claro que Veracruz es altamente vulnerable a condiciones extremas de tiempo, clima y precipitación, sería deseable contar con mejor información y capacidad de pronóstico de caudales para de esta manera poder predecir el comportamiento que tendrán al presentarse un evento extremo. Con este fin el presente trabajo está diseñado para el uso del algoritmo del Filtro de Kalman Discreto que ayude a la alerta o conocimiento de los posibles fenómenos hidrometeorológicos para las cuencas centrales del estado de Veracruz.

Metodología de la investigación

Dentro de las herramientas matemáticas que pueden ser utilizadas para la estimación estocástica a partir de mediciones en sensores ruidosos, se encuentra una de las más conocidas y de uso frecuente, el filtro de Kalman.

En 1973 Hino publicó una de las primeras aplicaciones del Filtro de Kalman al área de los recursos hídricos, en su artículo "On- Line Prediction of Hydrologic System". El problema a resolver era identificar las ordenadas del hidrograma unitario instantáneo como respuesta al proceso lluvia- escurrimiento, de forma secuencial con base en puntos con información disponible en una cuenca. Para este caso, la ecuación de estado está dada por una trayectoria aleatoria con estadísticas conocidas. El enfoque de Hino usa en la ecuación de medición una correlación discreta en las entradas (precipitación) con la función de respuesta del sistema (HUI), y se suponen conocidas las matrices de la covarianza del error en el proceso (Q) y en la medición (R). Los resultados mostrados son bastantes aceptables. El *filtro de Kalman* tiene su origen en el documento publicado por Rudolph E. Kalman en 1960 donde describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos.

La importancia del filtro de Kalman radica en que se constituye como el principal procedimiento para estimar sistemas dinámicos (entendidos como aquellos en los cuales las magnitudes que lo constituyan evolucionan en el tiempo) representados en la forma de estado-espacio con parámetros que cambian en el tiempo, en donde la esencia del algoritmo es la estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos. El estado contiene toda la información relativa al sistema en un cierto punto en el tiempo, esta información relativa al sistema en un cierto punto en el tiempo, esta información debe permitir la inferencia del comportamiento pasado del sistema, con el objetivo de predecir su comportamiento futuro (Solera, 2003). Este filtro es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. En esencia éste pronostica el nuevo estado a partir de su estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este último es minimizado estadísticamente (Welch y Bishop, 2001). Lo que hace al filtro tan interesante es precisamente su habilidad para predecir el estado de un sistema, aun cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida. Como mencionan Welch y Bishop (2001), el filtro de Kalman estima el estado $x \in R^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto, el cual está descrito por la ecuación diferencial lineal estocástica:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad ()$$

Con una medición $z \in R^m$, que está representada por:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad ()$$

La matriz $A_{n \times n}$ en la ecuación 1 relaciona el estado en el periodo de tiempo previo $k-1$ al estado que ocurre en el momento k . Esta matriz puede cambiar en el tiempo; sin embargo, habitualmente se considera constante (Welch y Bishop 2001). La matriz $B_{n \times l}$ relaciona el control opcional de entrada $u \in R^l$ con el estado x . La matriz $H_{m \times n}$ en la ecuación 2 relaciona el estado con la medición z_k y en la práctica también es generalmente considerada constante (*Ibid.*). Por otra parte, las variables aleatorias w_k y v_k en las ecuaciones 1 y 2 representan el error del proceso y el error de la medición, respectivamente. Estas variables aleatorias se suponen independientes una de otra, que son ruido blanco (completamente independientes, sin correlación una de la otra en cualquier tiempo) y tienen una función de distribución de probabilidad normal

$$p(w) \sim N(0, S) \quad ()$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad ()$$

S Representa la matriz de covarianza de la perturbación del proceso, y R , la matriz de covarianza de la perturbación de la medición. Ambas matrices podrían cambiar en el

tiempo; sin embargo, por simplicidad en la práctica se suele suponer que son constantes. Estas matrices pueden representarse a su vez de la siguiente manera (Simon, 2001):

$$S = E[w_k w_k^T] \quad ()$$

$$R = E[v_k v_k^T] \quad ()$$

Donde $E[\cdot]$ representa la esperanza matemática. Estas matrices representan la variación de los errores o perturbaciones en las estimaciones del proceso o sistema analizado y de las mediciones del mismo con respecto a la media del proceso.

El primer paso en la aplicación del filtro consiste en generar un pronóstico del estado hacia adelante en el tiempo tomando en cuenta toda la información disponible hasta ese momento, y en un segundo paso generar un pronóstico mejorado del estado, de tal manera que el error se minimiza estadísticamente (Welch y Bishop, 2001).

Las ecuaciones utilizadas por el filtro de Kalman, tanto para la etapa de pronóstico como de corrección, se presenta a continuación en las tablas 1.1 y 1.2 respectivamente:

Tabla 1.1 Ecuaciones de pronóstico del filtro de Kalman Discreto

$$\hat{x}_k = A \hat{x}_{k-1} + B u_k \quad (7)$$

$$P_k = A P_{k-1} A^T + S \quad (8)$$

Las ecuaciones de la tabla 1.2 pronostican las estimaciones del estado y la covarianza hacia adelante desde $k - 1$ a k .

Tabla 1.2 Ecuaciones de corrección del filtro de Kalman discreto

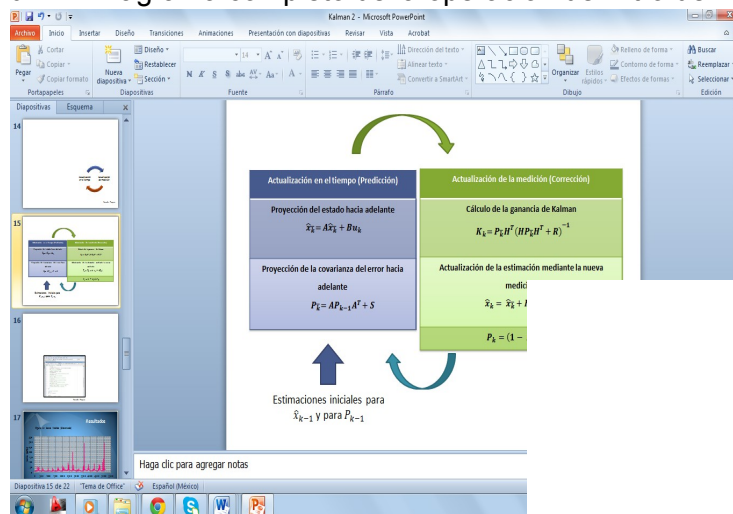
$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} \quad (9)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K (z_k - H \hat{x}_k) \quad (10)$$

Las matrices A y B provienen de la ecuación (1), y fueron definidas con anterioridad. La matriz S se introdujo en la ecuación (5).

$$P_k = (1 - K_k H) P_k \quad (11)$$

Figura 1.2 Diagrama completo de la operación del filtro de Kalman



Fuente: Welch y Bishop (2001)

Como mencionan Welch y Bishop (2001), el proceso a seguir durante la aplicación del filtro de Kalman podría resumirse en los siguientes pasos mostrados en la Figura 1.2:

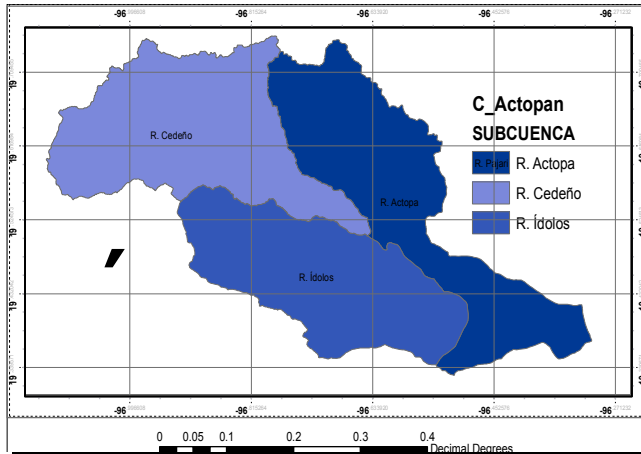
- a. Generar un pronóstico del estado hacia adelante en el tiempo, tomando en cuenta toda la información disponible hasta ese momento, partiendo de la propuesta inicial del estado y de la matriz de covarianza del error P_k .
- b. Corregir la proyección del estado (proceso de actualización de las mediciones). La primera tarea dentro de esta etapa es el cálculo de la ganancia de Kalman K_k .
- c. Medir el proceso para obtener z_k y entonces generar una nueva estimación del estado incorporando la nueva medición.
- d. Obtener una nueva estimación de la covarianza del error, para después estimar nuevamente el estado.

Después de cada par de actualizaciones, tanto del estado como de la medición, el proceso se repite partiendo de las nuevas estimaciones y de la covarianza del error. Esta naturaleza recursiva es una de las características más importantes del filtro de Kalman

Zona de Estudio

La cuenca del río Actopan se encuentra situada geográficamente entre los 19°20' y 19°46' latitud norte, y 96°20' y 97°08' longitud oeste. Tiene un área aproximada de 2 000 km², como se muestra en la figura 1.3, está distribuida dentro del estado de Veracruz (CONAGUA, 2005).

Figura 1.3 Ubicación geográfica de la cuenca del Río Actopan



El río Actopan nace en las faldas del Cofre de Perote a 3 000 m de altitud, su curso sigue en dirección noreste a través de 21 km de terreno montañoso capturando por ambas márgenes las corrientes que se forman en la porción nororiental del Cofre de Perote, luego cambia su curso hacia el sureste a la altura del poblado de Tlacolulan, Ver., dirección que desembocadura

Fuente: Propia

Fuente: Propia **Tabla 4.1** Parámetros morfométricos

DESCRIPCIÓN	UND	VALOR
De la superficie		
Área	Km2	878.366
Perímetro de la cuenca	km	239.786
Altitud		
Cota Máxima	msnm	3156
Cota Mínima	msnm	142
Pendiente		
Pendiente promedio	%	26.05
De la Red Hídrica		
Longitud del curso principal	km	82.461
Orden de la Red Hídrica	UND	6
Longitud de la red hídrica	km	1327.044
Tiempo de concentración	horas	6.496
Numero de curva	Adim	80
Pendiente del cauce principal	m/km	39.41

Los parámetros morfométricos de la superficie, Altitud, pendiente, número de curva hídrica (Mann, 2007), fueron calculados por medio de un sistema de información geográfica y se muestran en la tabla 4.1.

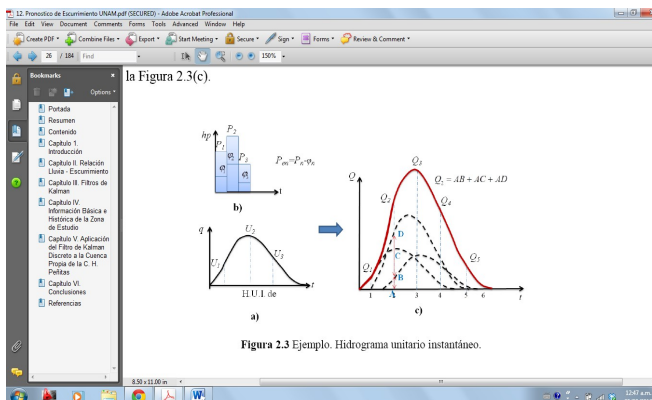
Conformación del algoritmo del Filtro de Kalman

En una primera elección de la función de respuesta utilizada, el cálculo de los caudales de entrada de la Subcuenca del Río Sedeño, se obtuvo mediante la aplicación del hidrograma unitario instantáneo (HUI) como función de respuesta. Para ejemplificar el proceso de

cálculo supóngase que se tiene un hietograma de precipitación efectiva como el mostrado en la figura 5.8c, a través del hidrograma unitario instantáneo presentado en la Figura 5.8b.

Fuente: Propia

Figura 5.1 Hidrograma Unitario Instantáneo



Durante el pronóstico de una avenida las barras del hietograma no son conocidas en su totalidad, pero se conoce la función de respuesta, es decir el HUI, cuyas ordenadas se pueden representar como un incremento entre el gasto en un instante y el siguiente ($d_{qij} = q_j - q_i$), los gastos del hidrograma de escurrimiento directo estarán representados como:

$$Q_1 = h p_1 q_1$$

$$Q_2 = Q_1 + h p_1 dq_{12} + h p_2 q_1$$

Si se desea predecir cada uno de los caudales con base en lo registrado en $k-1$, los valores resaltados en negritas en el sistema anterior representan un error en la predicción de los mismos, debido a que aún no se registra la precipitación correspondiente al tiempo k . Con base en lo anterior y de forma generalizada, los caudales se pueden representar como:

$$Q_t = H_{t-1} x_t + Q_{t-1} + \omega_t$$

$$H_{t-1} = [h p_{t-1}, h p_{t-2} \dots, h p_{t-n}]$$

$$x_t = \begin{bmatrix} dq_{n-i-1, n-i} \\ dq_{n-2, n-1} \\ dq_{n-1, n} \end{bmatrix}$$

Dónde:

Q_t = Caudal registrado en el momento t .

x_t = Vector que contiene los incrementos entre ordenadas sucesivas del HUI.

H = Vector con las precipitaciones anteriores al tiempo analizado disponibles en el hidrograma de precipitación efectiva.

n = Cantidad de barras consideradas en el hidrograma de precipitación efectiva.

ω_t = Error al predecir el caudal, absorbido por la parte en la convolución en la que intervienen las precipitaciones que aún no son registradas.

El pronóstico de caudales en la subcuenca del río Sedeño mediante la aplicación del filtro de Kalman Discreto considerando que la función de respuesta es el hidrograma unitario instantáneo abarca el periodo de análisis de 1980 al 2003. El algoritmo fue programado en la plataforma de cómputo de Matlab.

Pasos en el pronóstico:

Se obtienen las series de lluvia efectiva mencionadas con anterioridad, dichas series se corrigen para no tener huecos en el registro sabiendo de antemano que la corrección implica también un grado de error en el pronóstico. Las variables a estimar mediante la aplicación del algoritmo del filtro de Kalman con base en lo desarrollado, serán los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta de la cuenca, en este caso representada por el HUI. El vector que contiene a estos incrementos en la nomenclatura

del filtro es conocido como estado, denotado por x_k . Una vez definidos, los caudales de entrada a la subcuenca del Río de Sedeño se obtienen mediante la convolución del estado con las precipitaciones como se muestra detalladamente más adelante. Las ecuaciones tanto de estado como de medición que conforman el filtro de Kalman se presentan como:

Ecuación de Estado:

$$x_k = A x_{k-1} + B u_k + w_{k-1} \quad (12)$$

Dónde:

x_k Estado a estimar en el tiempo k (incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta, HUI).

A Matriz identidad que relaciona el estado en el momento $k-1$ con el que ocurre en k , sus dimensiones dependen de n (Explicada con anterioridad).

x_{k-1} Estado estimado en un paso anterior.

B Matriz que relaciona el control opcional de entrada con el estado. Definida como una matriz identidad con las mismas dimensiones que la matriz A.

u_k Matriz que representa el control opcional de entradas, será considerando como un vector de ceros de dimensiones $n \times 1$ debido a que el sistema no contiene variables que se puedan controlar y que influyan en su respuesta.

w_{k-1} = Error en el proceso, absorbido por aquellas precipitaciones que aún no han sido registradas (Explicada con anterioridad).

Ecuación de medición:

$$z_k = H x_k + v_k \quad (13)$$

$$z_k = Q_k - Q_{k-1} \quad (14)$$

Q_k y Q_{k-1} Representa el caudal medido en el tiempo k y $k-1$, respectivamente.

H Vector que contiene los valores a convolucionar con los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta, conformado en este caso por las

mediciones de precipitación efectiva previas al momento k analizado ($H = [hp_{t-1}, hp_{t-2}, \dots, hp_{t-n}]^T$). Una vez definidas las dos ecuaciones base del filtro (de acuerdo a lo desarrollado), el filtro de Kalman parte de una estimación a priori del estado inicial $\hat{x}_0$, así como de un valor inicial de la matriz de covarianza del error P_0 . Debido a que no se conoce con exactitud el valor que tomará el estado inicial, su valor esperado se considera arbitrariamente como un vector nulo $[0]_{n \times 1}$ de dimensión n , donde n representa el número de barras del hietograma de precipitación efectiva anteriores al tiempo analizado consideradas en la convolución para obtener los caudales de entrada a la cuenca de estudio

$$\hat{x}_0 = [0]_{n \times 1} \quad (15)$$

Mientras que la matriz de covarianza del error del estado inicial será:

$$P_0 = N \cdot I \quad (16)$$

Donde N es un escalar lo suficientemente grande que refleja la incertidumbre de los valores supuestos para el estado inicial, en concordancia con Valdés et al., 1980. I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Una vez definidas las condiciones iniciales, el filtro aplica con las ecuaciones de predicción (paso 1, Figura 1.2), responsables de proyectar hacia adelante en el tiempo el estado actual, así como también de realizar una nueva estimación de la matriz de covarianza, y obtener así, las estimaciones a priori para el próximo paso en el tiempo.

Para el caso específico del presente trabajo estas ecuaciones estarán conformadas por:

Ecuaciones de pronóstico del estado

Proyección del estado hacia adelante (pronóstico):

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \quad (17)$$

$\hat{x}_k = \hat{x}$ Estado estimado a priori.

$\hat{x}_{k-1}$ Estimación del estado en el tiempo $k-1$. Esta variable se irá modificando con cada ciclo de pronóstico y actualización. Su valor inicial se supone, en este caso como un vector nulo.

Proyección de la matriz de covarianza del error hacia adelante (P_k)

$$P_k = P_{k-1} + S \quad (18)$$

$S[n \times n]$ = Matriz de covarianza de la perturbación. En este apartado es considerada de tres formas distintas (como una matriz de ceros, una matriz cuya diagonal principal depende de los errores en el estado pronosticada o bien como un valor muy pequeño cercano a cero) como se verá más adelante. Sus dimensiones serán de $n \times n$. Con las ecuaciones anteriores se obtiene el pronóstico del estado es decir de los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta del sistema (HUI), así como de la matriz de covarianza del error. Una vez obtenidos, el pronóstico de los caudales de entrada de la subcuenca del Río Sedeño, se calcula como sigue:

$$Q_{estl} = H \cdot \hat{x}_k + Q_{k-1} \quad (19)$$

Donde

Q_{estl} = Pronóstico del caudal de entrada a la subcuenca.

$\hat{x}_k$ = Pronóstico del estado (incrementos entre las ordenadas del HUI).

Q_{k-1} = Caudal registrado en el tiempo $k-1$.

El vector H corresponde al definido con anterioridad. Una vez realizado el pronóstico de caudal (estimación a priori), se prosigue a la corrección o bien la actualización del pronóstico de los incrementos entre las ordenadas del HUI (ecuaciones de actualización, Figura 1.2), incorporando las mediciones “reales” de caudal tomadas en el instante analizado. Luego se corrige el pronóstico del caudal utilizado nuevamente la ecuación (19). Por lo anterior, este paso es el responsable de la retroalimentación, debido a que incorpora nueva información dentro de la estimación realizada, con lo que es posible obtener una nueva estimación mejorada del estado posteriori.

Las ecuaciones en este paso estarán conformadas de la siguiente manera:

Actualización o corrección del pronóstico.

Cálculo de la ganancia de Kalman K_k

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} \quad (20)$$

$P_k = \hat{P}_k$ Matriz de covarianza del error calculada con anterioridad en las ecuaciones de predicción.

$R = \hat{R}$ Matriz de covarianza de la perturbación o ruido en la medición. Para el caso del presente trabajo, estará representada por $R = a \cdot Q_{k-1}$, donde a es una constante de proporcionalidad que representa un error constante igual a una fracción a del caudal medido en el tiempo anterior $k-1$ (Valdés et al 1980).

Actualización del pronóstico con base en las mediciones actuales z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (z_k - H \hat{x}_k) \quad (21)$$

$\hat{x}_k = \hat{x}_k$ Actualización del estado, corregido considerando las nuevas mediciones en el sistema

$K_k = \hat{K}_k$ Ganancia de Kalman que permite realizar la corrección en el nuevo pronóstico (Ecuación 15)

$z_k = \hat{z}_k$ Diferencia entre el caudal “observado” en k con el observado en $k-1$ ($Q_k - Q_{k-1}$, $\hat{z}_k$ ecuación 14), tomados directamente del cálculo del anti tránsito.

$\hat{x}_k = \hat{x}_k$ Primera estimación del estado, obtenido en la primera etapa de la aplicación del filtro de Kalman Discreto.

El vector H ya fue definido con anterioridad

Actualización de la Matriz de covarianza

$$P_k = (1 - K_k H) P_k \quad (22)$$

$P_k = \hat{P}_k$ Matriz de covarianza corregida, calculada con base en las nuevas mediciones del sistema.

$P_k = \hat{P}_k$ Matriz de covarianza estimada a priori en la primera etapa de predicción del filtro de Kalman discreto.

Una vez actualizado el pronóstico del estado, se corrige al pronóstico de los caudales de entrada a la subcuenca del Río Sedeño, para obtener una segunda estimación de la siguiente manera:

$$Q_{est\ 2} = H \cdot \hat{x}_k + Q_{k-1} \quad (23)$$

Donde $\hat{x}_k$ son los incrementos corregidos o bien actualizados entre las ordenadas de la función de respuesta en la subcuenca. Es importante recordar que una vez realizadas las actualizadas, el estado $(\hat{x}_k)$ y la matriz de covarianza actualizadas (P_k) serán consideradas como iniciales en el siguiente pronóstico, aplicando nuevamente el algoritmo. Las matrices de la covarianza del error en el proceso (S), y de la medición (R), utilizados en las ecuaciones de predicción y actualización del sistema se propusieron constantes, como en Hino, 1973 y Valdés et al., 1980., aunque se probaron alternativas adicionales para el valor correspondiente a la matriz de covarianza del error en el proceso (S). Dentro de la rutina de aplicación del filtro de Kalman Discreto, se obtuvieron también estadísticos que permiten medir cuantitativamente la precisión del pronóstico.

Resultados

Los resultados indican que el modelo matemático se ajusta adecuadamente a las condiciones tropicales de las cuencas centrales del estado de Veracruz. Al evaluar la aplicación del Filtro de Kalman se presentó la gráfica de la avenida principal de la cuenca de Actopan.

Figura 6.1 Gasto Medido

Figura 6.2 Gasto Pronosticado mediante Filtro de Kalman Discreto

Conclusiones

Con la elaboración del presente trabajo se tienen las siguientes conclusiones:

- I. La escasez de información hidrometeorológica en México ha sido uno de los mayores problemas para aplicar modelos hidrológicos distribuidos de estructura compleja. Es por esa razón que la mayoría de los estudios existentes con fines de pronóstico de crecidas se han hecho en base a modelos matemáticos agregados.
- II. La aplicación del Filtro de Kalman al pronóstico de avenidas ha proporcionado resultados sumamente aceptables que permiten tener un pronóstico con errores pequeños, debido a que es corregido con cada nueva medición, de manera que podría ser considerado como una buena opción en el manejo y operación de grandes ensambles y a la prevención de inundaciones.
- III. El tiempo computacional invertido se reduce según el equipo de cómputo con el que se cuente, de cualquier manera es mínimo si se compara con los resultados obtenidos.
- IV. La aplicación del Filtro de Kalman Discreto proporciona buenos resultados en el pronóstico tanto de los valores extremos como el de los mínimos.
- V. Es importante considerar la posible utilidad del Filtro de Kalman en otras áreas (hidráulica, hidrología, etc.), por lo que se propone seguir realizando estudios al respecto con el propósito de evaluar su aplicación.

Referencias Bibliográficas

- Abderrahman Assabbane et Saad Bennis.** (2000). Modèle de prévision pour la gestion en temps réel : application aux réseaux d'assainissement. Canadian Journal of Civil Engineering
- Anthes, R., Corell, R., Holland, G., Hurrell, J., MacCracken, M., & Trenberth, K.** (2006). Hurricane and global warming: Potential likages and consequences.
- Hino M.** (1973). On- line Prediction of hydrology systems. Proc Fifteenth Conf. IAHR, Istanbul, Vol. 4 pp 121-129.
- Magaña, V.** 2010, " Guía para generar y aplicar escenarios probabilísticos regionales de cambio climático en la toma de decisiones", Centro de ciencia de Atmosfera, Universidad Autónoma de México, (2010).
- Simon Dan** (2001) "Kalman Filtering", Embedded Systems Programming, Vol. 14 pp. 72-79.
- Solera.** (2003) El Filtro de Kalman. Banco Central de Costa Rica División Económica Departamento de Investigaciones Económicas.
- Sunmin K., Yasuto T., y Kaoru T.** (2004) Embedding Kalman Filter into a Distributed Hydrological Model. Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Japón.
- Welch G. y Bishop G.** (2001). An Introduccion to the Kalman Filter. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill. Course 8, University of North Carolina at Chapel Hill. Department of Computer Science Chapel Hill.
- Comisión Nacional del Agua,** 2013. (CONAGUA). Estaciones Hidrométricas y climatológicas.
- Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,** 2009. (IMTA), Banco Nacional del Agua superficial (BANDAS), México.
- Instituto Nacional de Estadística y geografía,** 2013. (INEGI). Cartas topográficas digitales, México.
- Inventario Nacional de Obras de Protección Contra Inundaciones en Cauces Naturales** 2009 México (UNAM).

